Άλγεβρικές Δομές 1 — 02-03-17

- Βασικό Αντικείμενο: Μελέτη Αλγεβρικών Δομών
  - Ομάδες
  - Δακτύλιοι

→ Άλγεβρα
  - Κλασική Άλγεβρα (Αρχαιότητα ~ 1850)
  - Αφηρημένη Άλγεβρα (1850 ~)

- Κλασική Άλγεβρα:
  - Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων
  - —"— Πολυωνυμικών Εξισώσεων

- M. Al Kwarizmi (825 μ.Χ): Συνεισφορά στην εύρεση ριζών 2οβάθμιας Εξίσωσης

- al-jabr ↦ Άλγεβρα

- Cardano (1545). Ars Magna: Μέθοδοι επίλυσης 3ο-4οβάθμιων εξισώσεων

- D'Alembert ~ Gauss (1746-1799): Απόδειξη Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας

- Ruffini-Abel (1799 ~ 1820): Η γενική πολυωνυμική εξίσωση 5ου βαθμού <u>δεν</u> επιλύεται με ριζικά.

- Galois-Lagrange-Cauchy (1820-1850): κριτήρια επιλυσιμότητας πολυωνυμικών εξισώσεων
  ↳ Έννοια της ομάδας

- Cayley (1845): Ορισμός ομάδας κι οι βασικές ιδιότητές της
- Hamilton (1843): δακτύλιος των τετρανίων του Hamilton

⇒ Θεωρία Αριθμών (Τελευταίο Θεώρημα Fermat)

Η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$, για $n \geq 3$ <u>δεν</u> έχει ακέραιες λύσεις

- Η έννοια του δακτυλίου: (Fraenkel-Hilbert-1914)

(Kumel-Dedekind-Kronecker-Noether, ...)

- Θεμελίωση Αφηρημένης Άλγεβρας: (1921-1927) (E. Noether - E. Artin)
- "Μοντέρνα Άλγεβρα" Van den Waerden (1930)

- Πρόγραμμα Erlangen (Felix Klein)

Προκαταρκτικές Έννοιες

Έστω X, Y σύνολα. Τότε μια σχέση από το X στο Y είναι ένα υποσύνολο του $X \times Y$

$R \subseteq X \times Y$

($X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X$ και $y \in Y\}$)

(καρτεσιανό γινόμενο των X, Y)

- Μια απεικόνιση από το σύνολο X στο σύνολο Y είναι μια σχέση $f \subseteq X \times Y$ έτσι ώστε:

$$(\forall x \in X)(\exists!\, y \in Y) : (x,y) \in f$$

Τότε το μοναδικό $y \in Y$ ε.ω: $(x,y) \in f$ θα συμβολίζεται με $f(x)$ και θα γράφουμε

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x) = y$$

Έστω $f : X \to Y$ μια απεικόνιση μεταξύ των X, Y

Έστω $S \subseteq X$ και $T \subseteq Y$

$f(S) = \{ f(x) \in Y \mid x \in S \}$: εικόνα ~~...~~ του S μέσω της f

$f^{-1}(T) = \{ x \in X \mid f(x) \in T \}$: αντίστροφη εικόνα του T μέσω της f

Ιδιαίτερα, αν $S = X$, τότε $f(x)$ καλείται εικόνα της f $\{Im(f)\}$

Προφανώς, $f^{-1}(Y) = X$

<u>Παράδειγμα:</u> $\forall n \in \mathbb{N}$

$f(n) = 3n+5$ $\{f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ {f [illegible]

$g(n) = 3n+5$ $\{g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\}$ g [illegible]

Οι απεικονίσεις f, g <u>δεν</u> είναι ίσες παρόλο που έχουν τον ίδιο τύπο

<u>Ορισμός</u>: Δύο απεικονίσεις $f, g: X \to Y$ είναι ίσες και θα γράφουμε $f = g \iff \forall x \in X: f(x) = g(x)$

Έστω οι απεικονίσεις: $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

Τότε ορίζεται η σύνθεση των απεικονίσεων f και g: $g \circ f: X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

<u>Παράδειγμα</u>: Για κάθε σύνολο X ορίζεται η ταυτοτική απεικόνιση $Id_X: X \to X$, $Id_X(x) = x$

<u>Ιδιότητες Σύνθεσης Απεικονίσεων</u>

Έστω οι απεικονίσεις $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$

Τότε ορίζονται οι συνθέσεις $g \circ f: X \to Z$

$h \circ g: Y \to W$

κι επίσης ορίζονται και οι: $h \circ (g \circ f): X \to W$

$(h \circ g) \circ f: X \to W$

Τότε $\forall x \in X : [h \circ (g \circ f)](x) =$

$= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$ ... (1)

$\forall x \in X : [(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) =$

$= h(g(f(x)))$ (2)

Από τις (1), (2) $\Longrightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Η παραπάνω είναι η προσεταιριστική ιδιότητα σύνθεσης απεικονίσεων